

有限管道上非截断 Boltzmann 方程解的性态研究*

杨航¹, 刘莉萍², 马璇^{1,2}

(1. 暨南大学信息科学技术学院, 广东 广州 510632;
2. 武汉纺织大学数学与计算机学院, 湖北 武汉 430073)

摘要: Boltzmann 碰撞算子之间的相互作用以及方程在边界处潜在的奇性, 使得在 $L_{x,v}^\infty$ 框架下, 获得整体解比较困难。文章关于空间变量 x 引入函数空间 $H_{x_1}^1 H_x^2$, 在 inflow 边界条件下研究了非截断 Boltzmann 方程在有限管道中解的全局存在唯一性、大时间行为以及解的正则性传播。

关键词: 非截断的 Boltzmann 方程; 能量估计; inflow 边界条件

中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2020) 06-0136-12

The non-cutoff Boltzmann equation in a finite channel

YANG Hang¹, LIU Liping², MA Xuan^{1,2}

(1. College of Information Science and Technology, Jinan University, Guangzhou 510632, China;
2. College of Mathematics and Computer Science, Wuhan Textile University, Wuhan 430073, China)

Abstract: It's very difficult to establish the global existence in the framework of $L_{x,v}^\infty$ due to the interaction between collision operators and the underlying singularity at the boundary. In this paper, we construct a global and unique solution in a new function space $H_{x_1}^1 H_x^2$ for the non-cutoff Boltzmann equation with inflow boundary condition in a finite channel. Moreover, we also obtain the large-time behavior and the propagation of the regularity of the solution.

Key words: non-cutoff Boltzmann equation; energy estimate; inflow boundary condition

1 引言和主要结论

本文考虑非截断的 Boltzmann 方程

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = Q(F, F) \quad (1)$$

给定初始条件为

$$F(0, x, v) = F_0(x, v)$$

这里, 未知函数 $F(t, x, v) \geq 0$ 为粒子的密度分布函数, $t > 0$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega = I \times T^2 \subset \mathbb{R}^3$, $v = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, \bar{v}) \in \mathbb{R}^3$ 。对于该方程右边的碰撞算子 $Q(\cdot, \cdot)$, 有

$$Q(G, F) = \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} B(v-u, \sigma) [G(u')H(v') - G(u)H(v)] dud\sigma$$

* 收稿日期: 2019-10-08

基金项目: 国家自然科学基金 (11601092, 11971201)

作者简介: 杨航 (1995年生), 女; 研究方向: 偏微分方程; E-mail: yhang918@stu2018.jnu.edu.cn

通信作者: 马璇 (1980年生), 女; 研究方向: 偏微分方程; E-mail: xma@wtu.edu.cn

这里, (u, v) 指粒子碰撞前的速度, (u', v') 为粒子碰撞后的速度, 满足

$$\begin{cases} v' = \frac{v+u}{2} + \frac{|v-u|}{2}\sigma, \\ u' = \frac{v+u}{2} - \frac{|v-u|}{2}\sigma, \end{cases} \sigma \in S^2,$$

S^2 为单位球面, $B(v-u, \sigma) \geq 0$ 称为 Boltzmann 碰撞核, 仅依赖于 $|v-u|$ 及偏移角 θ 。关于 Boltzmann 碰撞核有: $B(v-u, \sigma) = \Phi(|v-v'|)b(\cos\theta)$, $\cos\theta = \left\langle \sigma, \frac{(v-u)}{|v-u|} \right\rangle$ 。通常情况下, b 和 Φ 均为非负函数; 角函数满足

$$\frac{1}{C_b \theta^{1+2s}} \leq \sin\theta b(\cos\theta) \leq \frac{C_b}{\theta^{1+2s}}, \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

这里 $C_b > 0, 0 < s < 1$; 当 $\gamma + 2s \geq 0$, 有 $\Phi(|v-v'|) = C_\Phi |v-v'|^\gamma (C_\Phi > 0)$ 成立, 则称为硬位势; 当 $-3 < \gamma < -2s$, 有 $\Phi(|v-v'|) = C_\Phi |v-v'|^\gamma (C_\Phi > 0)$ 成立, 则称为软位势。本文中定义

$$\gamma > \max\left\{-3, -\frac{3}{2} - 2s\right\}, 0 < s < 1$$

这里角函数的表达式关于 θ 在 0 点处具有奇性, 通常会将其人为的做截断去掉这种奇性, 本文我们不做这种假设, 因此我们称之为非截断的 Boltzmann 方程。

边界效应对 Boltzmann 方程十分重要, Cercignani^[1] 证明了一维空间中线性 Boltzmann 方程的边值问题在有界域中的唯一解, 之后将该唯一性定理推广到了二维和三维空间以及一般初边值问题的研究中^[2]。再之后, Pao^[3] 利用隐函数定理, 将 Cercignani 中的线性问题推广到了非线性问题上, 并证明了解的存在性和唯一性。Esposito 等^[4-5] 则在 Cercignani, Pao 等工作的基础上研究了无滑移边界条件下平行板中 Boltzmann 方程的流体动力学极限。而对于一般的有界域, Shizuta 等^[6] 通过使用 Vidav^[7] 的多重迭代方法, 对镜面反射边界条件的初边值问题, 找到解的全局存在性和时间衰减率。上个世纪 80 年代, Ukai^[8] 为 Boltzmann 方程构造了著名的迹定理 (现称为 Ukai 迹定理), 之后 Hamdache^[9] 用它来构造具有 Maxwell 边界条件的 Boltzmann 方程的重整化弱解。后来, Cercignani^[10] 推广了 Ukai 的迹定理, 得到了更一般情形下的迹定理。2010 年, Guo^[11] 基于一个新的 $L^2 - L^\infty$ 估计, 研究了四种基本边界条件下的时间衰减和连续性。根据这一开创性工作, Esposito 等^[12] 利用 $L^2 - L^\infty$ 的方法和一个结构性的证明方法构建了一个真正的非平衡态的稳态解。Briant 等^[13] 则证明了适应系数 α 在 $(\frac{\sqrt{2}}{3}, 2)$ 的具有 Maxwell 边界条件的 Boltzmann 方程的整体适定性。Kim 等^[14] 通过迭代 Duhamel 公式三次, 去掉了 [15] 中研究单一镜面反射边值问题所需的解析边界条件。之后, Liu 等^[16] 将文献 [11] 得到的结果推广到了截断的软位势的情况。Duan 等^[17] 则证明了具有大振幅初始值的全局适定性。Guo 等^[18] 将 Arkeryd 等所考虑的 Cauchy 问题推广到有界域中的镜面反射边界问题。Esposito 等^[19] 和 Duan 等^[20] 发展了新的 $L^3 - L^6$ 方法, 研究了 Boltzmann 方程在有界域上的流体动力学极限。最近, Guo^[21] 将此方法应用到镜面反射边界条件的 Boltzmann 方程的研究中。Duan 等^[22] 发展了一类新的函数空间来处理有限管道中非截断 Boltzmann 方程的 inflow 边界和镜面反射边界条件的整体适定性问题。

研究 Boltzmann 方程初边值问题的主要困难在于边界处存在奇性^[18], 实际上这个奇性可能会传播到域的内部^[23], 由于这种奇性使得 Boltzmann 方程初边值问题的解缺少一定的正则性。因此, 与 Cauchy 问题不同, 在 Sobolev 空间中建立具有物理边界的 Boltzmann 方程的解通常是很困难的。我们知道, 尽管对非截断的 Boltzmann 方程的 Cauchy 问题的适应性^[24-25] 已经有了很好的研究, 但对非截断的 Boltzmann 方程的初边值问题仍然是一个开放性的问题。受文献 [22] 的启发, 本文对空间变量 x 构造了一个新的函数空间 $H_{x_1}^1 H_{x_2}^2$, 通过一些关键的观察, 利用基本能量方法来研究在周期管道内 Boltzmann 解的全局存在唯一性, 时间衰减估计以及空间正则性的传播。

考虑在有限周期性管道 $\Omega = I \times T^2 = \left\{x \mid x = (x_1, \bar{x}), x_1 \in I = (-1, 1), \bar{x} = (x_2, x_3) \in T^2 = [0, 2\pi]^2\right\}$ 中的 Boltzmann 方程, 容易知道整体的 Maxwell 是方程 (1) 的一个平凡解。因此我们构造方程在 Maxwell 平衡态附近的解, 令

$$F(t, x, v) = \mu + \mu^{\frac{1}{2}} f(t, x, v)$$

这里

$$\mu = \mu(v) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}$$

将上述扰动代入 (1) 便得到 Boltzmann 的线性化方程

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + Lf = \Gamma(f, f), t > 0, x \in \Omega, v \in \mathbf{R}^3 \tag{2}$$

对应的初始条件和给定 inflow 边界条件为

$$f(0, x, v) = f_0(x, v) \tag{3}$$

$$f(t, -1, \bar{x}, v)|_{v_1 > 0} = g_-(t, \bar{x}, v), f(t, 1, \bar{x}, v)|_{v_1 > 0} = g_+(t, \bar{x}, v) \tag{4}$$

其中, (2) 式中的线性算子 L 和非线性算子 Γ 为

$$Lf = -\mu^{-\frac{1}{2}} \left\{ Q\left(\mu, \mu^{\frac{1}{2}} f\right) + Q\left(\mu^{\frac{1}{2}} f, \mu\right) \right\}, \Gamma(f, f) = \mu^{-\frac{1}{2}} Q\left(\mu^{\frac{1}{2}} f, \mu^{\frac{1}{2}} f\right) \tag{5}$$

在阐述本文的主要结果之前, 先给出相关符号和定义:

1) 速度权

$$w_{q, \vartheta}(v) = e^{\frac{q(v)}{4}}, \langle v \rangle = \sqrt{1 + |v|^2}$$

其中, (q, ϑ) 满足

$$\begin{cases} \gamma + 2s \geq 0, \text{ 则 } q = 0 \\ -3 < \gamma < -2s, \text{ 则 } q > 0 \text{ 且 } \vartheta = 1 \end{cases} \tag{6}$$

同时, 定义 κ

$$\kappa = \begin{cases} 1, & q = 0, \gamma + 2s \geq 0 \\ \frac{\vartheta}{\vartheta + |\gamma + 2s|}, & q > 0, -3 < \gamma < -2s \text{ 且 } \vartheta = 1 \end{cases} \tag{7}$$

这里需要说明的是, 这种速度权主要是为了得到解的时间衰减率, 见 4.1.2 节的推导。

2) Boltzmann 方程线性化后的线性碰撞算子 L 具有强制性, 强制性表现在下面 D 范数的意义之下:

$$\begin{aligned} \|w_{q, \vartheta} f\|_D^2 &= \iint_{\mathbf{R}^3 \mathbf{R}^3 S^2} B(v-u, \sigma) w_{q, \vartheta}^2(v) \mu(u) (f(v') - f(v))^2 d\sigma dudv \\ &\quad + \iint_{\mathbf{R}^3 \mathbf{R}^3 S^2} B(v-u, \sigma) w_{q, \vartheta}^2(v) f(u)^2 \left(\mu^{\frac{1}{2}}(v') - \mu^{\frac{1}{2}}(v) \right)^2 d\sigma dudv, \\ \|w_{q, \vartheta} f\|_D^2 &= \iiint_{\Omega \mathbf{R}^3 \mathbf{R}^3 S^2} B(v-u, \sigma) w_{q, \vartheta}^2(v) \mu(u) (f(v') - f(v))^2 d\sigma dudv dx \\ &\quad + \iiint_{\Omega \mathbf{R}^3 \mathbf{R}^3 S^2} B(v-u, \sigma) w_{q, \vartheta}^2(v) f(u)^2 \left(\mu^{\frac{1}{2}}(v') - \mu^{\frac{1}{2}}(v) \right)^2 d\sigma dudv dx \end{aligned}$$

3) 为了方便, 我们使用能量方法, 定义能量范数 $E_{T, w}(f)$ 和耗散范数 $D_{T, w}(f)$ 分别为:

$$E_{T, w}(f) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f\|_{L_T^2 L_x^2 L_v^2}, \quad D_{T, w}(f) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \|\partial^\alpha [a, b, c]\|_{L_T^2 L_x^2} + \sum_{\alpha \in \Lambda} \|w_{q, \vartheta} \{I - P\} \partial^\alpha f\|_{L_T^2 L_x^2 L_v^2}$$

这里

$$\begin{aligned} \|f(t, x, v)\|_{L_T^2 L_x^2 H_{v_1}^1 H_{v_2}^2} &= \left(\iint_{\mathbf{R}^3} \sum_{\alpha \in \Lambda} \int |\partial^\alpha f(t, x, v)|^2 dx dv dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|w_{q, \vartheta} f(t, x, v)\|_{L_T^2 L_x^2 H_{v_1}^1 H_{v_2}^2} &= \left(\iint_{\mathbf{R}^3} \sum_{\alpha \in \Lambda} \int |w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f(t, x, v)|^2 dx dv dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

其中, $\partial^\alpha = \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2}$. 令 $\Lambda = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \bar{\alpha}) \mid \alpha_1 \leq 1, |\bar{\alpha}| \leq 2 \right\}$. 特别说明的是, 当 $q = 0$ 时, 则 $E_{T, w}(f), D_{T, w}(f)$ 分别记为 $E_T(f), D_T(f)$.

4) 为了表示方程的解在边界上的表现行为, 我们定义关于边界条件的泛函 $E(g_{\pm})$ 。当 $\alpha \in \Lambda$ 时, 记 $E^2(g_{\pm}) = E_1^2(g_{\pm}) + E_2^2(g_{\pm})$ 。这里

$$E_1^2(\partial^\alpha g_{\pm}) = \iint\limits_{0 \leq T^2 \pm v_1 < 0} \int |v_1|^{-1} \left(\left| \partial_t \bar{\alpha} g_{\pm} \right|^2 + \left| \bar{v} \cdot \nabla_{\bar{x}} \bar{\alpha} g_{\pm} \right|^2 + \left| L \bar{\alpha} g_{\pm} \right|^2 + \left| \partial^\alpha \Gamma(g_{\pm}, g_{\pm}) \right|^2 \right) dv d\bar{x} dt$$

以及

$$E_2^2(\partial^\alpha g_{\pm}) = \iint\limits_{0 \leq T^2 \pm v_1 < 0} \int |v_1| \left| \partial^\alpha g_{\pm} \right|^2 dv d\bar{x} dt$$

5) 其它记号: C 为一个比较大的正常数, λ 为一个比较小的正常数, 且 C 和 λ 在不同位置的值是不同的; $A \lesssim B$ 是指 $\exists C > 0$, 使得 $A \leq CB$, $A \sim B$ 指的是 $A \lesssim B$ 或者是 $B \lesssim A$; 若无特殊说明, (\cdot, \cdot) 是指在 $L^2_{x,v}$ 上的内积, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 指在 L^2_v 上的内积; $|\cdot| = |\cdot|_{L^2_x}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2_{x,v}}$ 或 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2_{x,v}}$ 或 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2_{x,v}}$ 。

下面我们给出本文的主要结果:

定理 1 (全局存在性与时间衰减率) 令 $\Omega = I \times T^2, \alpha \in \Lambda$, 若存在 $C > 0, \epsilon_0 > 0$, 使得

$$1) \quad \text{当 } F_0(x_1, \bar{x}, v) = \mu + \mu^{\frac{1}{2}} f_0(x_1, \bar{x}, v) \geq 0, F(t, \pm 1, \bar{x}, v) = \mu + \mu^{\frac{1}{2}} g_{\pm}(t, \bar{x}, v) \geq 0, \sum_{\alpha \in \Lambda} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f_0\|_{L^2_x L^2_v} + \sum_{\alpha \in \Lambda} E(w_{q,\vartheta} \partial^\alpha g_{\pm}) \leq \epsilon_0 \text{ 成立时, 则 (2)、(3) 和 (4) 存在着唯一解 } f(t, x_1, \bar{x}, v), \text{ 满足}$$

$$F(t, x_1, \bar{x}, v) = \mu + \mu^{\frac{1}{2}} f(t, x_1, \bar{x}, v) \geq 0$$

且, 对 $\forall T > 0$, 有

$$E_{T,w}(f) + D_{T,w}(f) \leq C \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f_0\|_{L^2_x L^2_v} + \sum_{\alpha \in \Lambda} E(w_{q,\vartheta} \partial^\alpha g_{\pm}) \right\}$$

2) 假设 $\exists \lambda > 0$, 使得 $\sum_{\alpha \in \Lambda} E(w_{q,\vartheta} \partial^\alpha g_{\pm}) + \sum_{\alpha \in \Lambda} \sup_{t > 0} E(e^{\lambda t} \partial^\alpha g_{\pm}) \leq \epsilon_0$ 成立, 其中 κ 由式 (7) 定义, 则对 $\forall t > 0$, 上面构建的解满足

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \|\partial^\alpha f(t)\|_{L^2_x L^2_v} \lesssim e^{-\lambda t} \sum_{\alpha \in \Lambda} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f_0\|_{L^2_x L^2_v} + e^{-\lambda t} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} E(w_{q,\vartheta} \partial^\alpha g_{\pm}) + \sum_{\alpha \in \Lambda} \sup_{t > 0} E(e^{\lambda t} \partial^\alpha g_{\pm}) \right\}$$

定理 2 (\bar{x} 方向正则性的传播) 令 $\Omega = I \times T^2, \Pi = \{\alpha = (\alpha_1, \bar{\alpha}) \mid \alpha_1 \leq 1, |\bar{\alpha}| \leq m\}$, m 为任意的正整数; 对 $\epsilon_0 > 0$, 若 $\sum_{\alpha \in \Pi} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f_0\|_{L^2_x L^2_v} + \sum_{\alpha \in \Lambda} E(w_{q,\vartheta} \partial^\alpha g_{\pm}) \leq \epsilon_0$ 成立, 则有

$$\sum_{\alpha \in \Pi} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f(t)\|_{L^2_x L^2_v} + \sum_{\alpha \in \Pi} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f\|_{L^2_x L^2_v} \lesssim \sum_{\alpha \in \Pi} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f_0\|_{L^2_x L^2_v} + \sum_{\alpha \in \Lambda} E(w_{q,\vartheta} \partial^\alpha g_{\pm})$$

下面, 第 2 部分给出一些关键的估计, 包括非线性项的估计和线性算子的强制性估计; 第 3 部分给出宏观量的估计; 第 4 部分给出问题 (2)、(3) 和 (4) 的整体存在性、大时间行为以及正则性传播证明。

2 基本估计

本文主要是用能量方法研究问题 (2)、(3) 和 (4) 在有限管道中解的全局存在唯一性, 时间衰减率以及解的正则性传播。为此, 提前给出几个重要的估计。

2.1 非线性算子的估计

首先, 关于方程 (2) 右端非线性项的估计。我们主要借助于文献 [26] (引理 2.3), 文献 [27] (引理 2.4) 的想法对其给出的一个新的重要的上界估计。

引理 1 若 $0 < s < 1, -2s > \gamma > \max\left\{-3, -\frac{3}{2} - 2s\right\}, \vartheta = 1, q \geq 0$, 有

$$\left| (\Gamma(f, g), w_{q,\vartheta}^2(v)h)_{L^2_x} \right| \lesssim \left(\left| \langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2} + s} w_{q,\vartheta} f \right|_{L^2_x} \left| g \right|_D + \left| \langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2} + s} g \right|_{L^2_x} \left| w_{q,\vartheta} f \right|_D \right) \left| w_{q,\vartheta} h \right|_D$$

$$+ \min \left\{ \left| w_{q,\vartheta} f \right|_{L_v^2} \left| \langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2} + s} g \right|_{L_v^2}, \left| g \right|_{L_v^2} \left| \langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2} + s} w_{q,\vartheta} f \right|_{L_v^2} \right\} \left| w_{q,\vartheta} h \right|_D + \left| w_{q,\vartheta} g \right|_{L_v^2} \left| \langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2} + s} w_{q,\vartheta} f \right|_{L_v^2} \left| w_{q,\vartheta} h \right|_D \quad (8)$$

在引理 1 的基础上, 我们主要利用 Sobolev 不等式来证明下述关于非线性算子 Γ 的估计。

定理 3 若 $0 < s < 1, -2s > \gamma > \max \left\{ -3, -\frac{3}{2} - 2s \right\}, \vartheta = 1, q \geq 0$, 当 $\alpha \in \Lambda, \eta > 0$ 有

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Lambda} \left(\int_0^T \left| (\partial^\alpha \Gamma(f, g), w_{q,\vartheta}^2 h) \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \eta \left\| w_{q,\vartheta} h \right\|_{L_t^2 L_x^2 L_v^2} \\ &+ C_\eta \left\{ \left\| w_{q,\vartheta} f \right\|_{L_t^\infty L_x^2 H_v^1 H_x^2} \left\| g \right\|_{L_t^2 L_x^2 H_v^1 H_x^2} + \left\| w_{q,\vartheta} f \right\|_{L_t^2 L_x^2 H_v^1 H_x^2} \left\| g \right\|_{L_t^\infty L_x^2 H_v^1 H_x^2} \right. \\ &\left. + \left\| w_{q,\vartheta} f \right\|_{L_t^\infty L_x^2 H_v^1 H_x^2} \left\| g \right\|_{L_t^2 L_x^2 H_v^1 H_x^2} + \left\| w_{q,\vartheta} f \right\|_{L_t^\infty L_x^2 H_v^1 H_x^2} \left\| w_{q,\vartheta} g \right\|_{L_t^2 L_x^2 H_v^1 H_x^2} \right\} \end{aligned}$$

证明 为了书写简便, 下面的证明中只考虑 $|\bar{\alpha}| = 2$, 即 $(\alpha_2, \alpha_3) = (0, 2)$ 或 $(2, 0)$ 或 $(1, 1)$, 其余情况证明类似。因此

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \left(\int_0^T \left| (\partial^\alpha \Gamma(f, g), w_{q,\vartheta}^2 h) \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{|\bar{\alpha}|=2} \left(\int_0^T \left| (\partial_x^{\bar{\alpha}} \Gamma(f, g), w_{q,\vartheta}^2 h) \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{|\bar{\alpha}|=2} \left(\int_0^T \left| (\partial_{x_1} \partial_x^{\bar{\alpha}} \Gamma(f, g), w_{q,\vartheta}^2 h) \right| dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $\alpha_1 = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{|\bar{\alpha}|=2} \left(\int_0^T \left| (\partial^\alpha \Gamma(f, g), w_{q,\vartheta}^2 h) \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{2 \leq i,j \leq 3} \left(\int_0^T \left| \Gamma(\partial_{x_i} \partial_{x_j} f, g), w_{q,\vartheta}^2 h \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{2 \leq i,j \leq 3} \left(\int_0^T \left| \Gamma(f, \partial_{x_i} \partial_{x_j} g), w_{q,\vartheta}^2 h \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sum_{2 \leq i,j \leq 3} \left(\int_0^T \left| \Gamma(\partial_{x_i} f, \partial_{x_j} g), w_{q,\vartheta}^2 h \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} := \sum_{n=1}^3 I_n \end{aligned}$$

其中 $i, j = 2, 3$ 。因为 $\gamma + 2s < 0$, 利用引理 1, 可推出

$$I_1 \lesssim \left(\int_0^T \int_{I \times T^2} \left\{ \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f \right|_{L_v^2} \left| g \right|_D + \left| g \right|_{L_v^2} \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f \right|_D + \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f \right|_{L_v^2} \left| g \right|_{L_v^2} + \left| w_{q,\vartheta} g \right|_{L_v^2} \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f \right|_{L_v^2} \right\} \left| w_{q,\vartheta} h \right|_D dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

讨论上述不等式的第一项。利用 Sobolev 不等式 $\|f\|_{L_{x_1}^\infty} \leq C\|f\|_{H_{x_1}^1}, \|f\|_{L_{x_1}^\infty} \leq C\|f\|_{H_{x_1}^2}$ 可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{|\bar{\alpha}|=2} \left(\int_0^T \int_{I \times T^2} \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f \right|_{L_v^2} \left| g \right|_D \left| w_{q,\vartheta} h \right|_D dx dt \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \sum_{2 \leq i,j \leq 3} \left(\int_0^T \int_I \left\| g \right\|_{L_t^2 L_x^2 L_v^\infty} \left\| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f \right\|_{L_t^2 L_x^2 L_v^2} \left\| w_{q,\vartheta} h \right\|_{L_t^2 L_x^2 L_v^2} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \sum_{2 \leq i,j \leq 3} \left(\int_0^T \left\| g \right\|_{L_t^\infty L_x^2 H_x^2 L_v^\infty} \left\| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f \right\|_{L_t^2 L_x^2 L_v^2} \left\| w_{q,\vartheta} h \right\|_{L_t^2 L_x^2 L_v^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\int_0^T \left(C_\eta \left\| g \right\|_{L_t^\infty L_x^2 H_x^2 L_v^1}^2 \left\| w_{q,\vartheta} f \right\|_{L_t^\infty H_x^2 H_v^1}^2 + \eta \left\| w_{q,\vartheta} h \right\|_{L_t^2 L_x^2 L_v^2}^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim C_\eta \left\| g \right\|_{L_t^2 L_x^2 L_v^2 H_x^2 H_v^1} \left\| w_{q,\vartheta} f \right\|_{L_t^\infty L_x^2 H_x^2 H_v^1} + \eta \left\| w_{q,\vartheta} h \right\|_{L_t^2 L_x^2 L_v^2} \end{aligned}$$

I_2 与 I_1 的证明方法是类似的, 下面对 I_3 进行估计。

$$\begin{aligned} I_3 &\lesssim \sum_{2 \leq i,j \leq 3} \left(\int_0^T \int_{I \times T^2} \left\{ \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} f \right|_{L_v^2} \left| \partial_{x_j} g \right|_D + \left| \partial_{x_j} g \right|_{L_v^2} \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} f \right|_D + \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} f \right|_{L_v^2} \left| \partial_{x_j} g \right|_{L_v^2} + \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_j} g \right|_{L_v^2} \left| w_{q,\vartheta} \partial_{x_i} f \right|_{L_v^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left| w_{q,\vartheta} h \right|_D dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

同理, 利用 Sobolev 不等式 $\|f\|_{L_{x_1}^3} \leq C\|f\|_{H_{x_1}^2}$ 及 $\|f\|_{L_{x_1}^6} \leq C\|f\|_{H_{x_1}^1}$, 并利用 Young 不等式有

$$\begin{aligned}
 \sum_{2 \leq i, j \leq 3} \left(\int_0^T \int_{I \times T^2} |w_{q, \vartheta} \partial_{x_i} f|_{L_x^2} |\partial_{x_j} g|_D |w_{q, \vartheta} h|_D dx dt \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \sum_{2 \leq i, j \leq 3} \left(\int_0^T \int_I \|w_{q, \vartheta} \partial_{x_i} f\|_{L_x^2 L_x^3} \|\partial_{x_j} g\|_{L_x^2 L_x^6} \|w_{q, \vartheta} h\|_{L_x^2 L_x^2} dx_1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\lesssim \left(\int_0^T \int_0^T \|w_{q, \vartheta} \partial_{x_i} f\|_{L_x^2 H_x^1} \|\partial_{x_j} g\|_{L_x^2 H_x^1} \|w_{q, \vartheta} h\|_{L_x^2 L_x^2} dx_1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\lesssim \left(\int_0^T \|w_{q, \vartheta} f\|_{L_x^2 H_x^2 L_x^{\infty}} \|g\|_{L_x^2 H_x^2 L_x^2} \|w_{q, \vartheta} h\|_{L_x^2 L_x^2 L_x^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\lesssim \left(\int_0^T \left(C_{\eta} \|w_{q, \vartheta} f\|_{L_x^2 H_x^2 L_x^{\infty}}^2 \|g\|_{L_x^2 L_x^2 L_x^2}^2 + \eta \|w_{q, \vartheta} h\|_{L_x^2 L_x^2 L_x^2}^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\lesssim C_{\eta} \|w_{q, \vartheta} f\|_{L_x^2 L_x^2 H_x^2 H_x^1} \|g\|_{L_x^2 L_x^2 H_x^2 H_x^1} + \eta \|w_{q, \vartheta} h\|_{L_x^2 L_x^2 L_x^2 L_x^2}
 \end{aligned}$$

当 $\alpha_1 = 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 &\sum_{|\bar{\alpha}|=2} \left(\int_0^T |(\partial^{\alpha} \Gamma(f, g), w_{q, \vartheta}^2 h)| dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \sum_{2 \leq i, j \leq 3} \left(\int_0^T |(\Gamma(\partial_{x_i} f, \partial_{x_i} \partial_{x_j} g), w_{q, \vartheta}^2 h)| dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{2 \leq i, j \leq 3} \left(\int_0^T |(\Gamma(\partial_{x_i} \partial_{x_j} f, \partial_{x_i} g), w_{q, \vartheta}^2 h)| dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\int_0^T |(\Gamma(f, \partial_{x_i} \partial_{x_i} \partial_{x_j} g), w_{q, \vartheta}^2 h)| dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{2 \leq i, j \leq 3} \left(\int_0^T |(\Gamma(\partial_{x_i} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f, g), w_{q, \vartheta}^2 h)| dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \sum_{2 \leq i, j \leq 3} \left(\int_0^T |(\Gamma(\partial_{x_i} \partial_{x_i} f, \partial_{x_j} g), w_{q, \vartheta}^2 h)| dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{2 \leq i, j \leq 3} \left(\int_0^T |(\Gamma(\partial_{x_j} f, \partial_{x_i} \partial_{x_i} g), w_{q, \vartheta}^2 h)| dt \right)^{\frac{1}{2}} := \sum_{m=1}^6 K_m
 \end{aligned}$$

对于 K_m 中的每一项, 均可用上述的方法进行估计。综上, 定理得证。

2.2 线性算子的强制性估计

下文我们直接给出线性算子 L 的强制性估计, 这些估计都已经在文献 [25] 中给出, 我们略去证明。

1) 对于式 (5) 定义的线性算子 L , 有 $(Lf, f) \geq \delta_0 \|\{I - P\}f\|_D^2$ ($\delta_0 > 0$)。其中, $\{I - P\}f$ 由式 (9) 和 (10) 给出。

2) 由文献 [25] [引理 2.6] 可知, $(Lf, w_{q, \vartheta}^2 f)_{L_x^2} \geq \delta_0 |w_{q, \vartheta} f|_D^2 - C |f|_{L^2(B_R)}^2$ ($C > 0$), 这里 B_R 指的是 \mathbf{R}^3 中以原点为圆心, 以 R 为半径的圆。

3 宏观量的估计

在这一节, 将推导问题 (2)、(3) 及 (4) 的宏观量的估计。因为前面定义的线性算子的强制性是退化的, 所以需要求解的宏观量和微观量分开估计。与前面提到的 Cauchy 问题的做法一样, 先用微观量控制宏观量, 再利用 L 的强制性估计得到微观量的估计, 最后把二者结合起来封闭能量估计。为此, 先将 f 分解为如下宏观部分和微观部分。

$$f = Pf + \{I - P\}f \tag{9}$$

其中,

$$If = f, Pf = \left\{ a + b \cdot v + \frac{1}{2} (|v|^2 - 3)c \right\} \mu^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

表达式中系数函数 $[a, b, c](t, x)$ 为宏观量, $[\cdot, \cdot, \cdot]$ 代表一个向量。令复合函数 $H = H(h(x, v)) \in N^{\perp}$, $N = \text{span} \left\{ \mu^{\frac{1}{2}}, v_i \mu^{\frac{1}{2}}, |v|^2 \mu^{\frac{1}{2}} \right\}$ ($i = 1, 2, 3$) 为 L 的零空间。 N^{\perp} 为 N 的正交补空间, 用 H 代

替 (2) 式右端的非线性项, 考虑下列线性方程

$$\partial_t f + v_1 \partial_{x_1} f + \bar{v} \cdot \nabla_{\bar{x}} f + Lf = H, t > 0, (x_1, \bar{x}) \in \Omega, v = (v_1, \bar{v}) \in \mathbf{R}^3 \tag{11}$$

相应的初始条件和边界条件为 (3) 和 (4)。下面利用对偶论证^[12]得到 $[a, b, c](t, x)$ 的一系列估计。

定理 4 在定理 1 中的条件下, 当 $\alpha \in \Lambda$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Lambda} \|\partial^\alpha [a, b, c]\|_{L^2_{x_1} L^2_{\bar{x}}} &\lesssim \sum_{\alpha \in \Lambda} \|\partial^\alpha f\|_{L^2_{x_1} L^2_{\bar{x}}} + \sum_{\alpha \in \Lambda} \|\partial^\alpha f_0\|_{L^2_{x_1} L^2_{\bar{x}}} + \sum_{\alpha \in \Lambda} E(\partial^\alpha g_\pm) \\ &+ \sum_{\alpha \in \Lambda} |Y_T^+(\partial^\alpha f)| + \sum_{\alpha \in \Lambda} \|\{I - P\} \partial^\alpha f\|_{L^2_{x_1} L^2_{\bar{x}}} + \sum_{\alpha \in \Lambda} \left(\int_0^T \left\| \left(\partial^\alpha H, \mu^{\frac{1}{4}} \right) \right\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{\alpha \in \Lambda} \left| Y_T^- \left(\frac{\partial^\alpha H}{|v_1|} \right) \right| \end{aligned}$$

这里, 我们使用了下述记号,

$$\begin{aligned} |Y_{T,w}^+(h)|^2 &= \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1| w_{q,\vartheta}^2 |h(t, 1, \bar{x}, v)|^2 dv d\bar{x} dt + \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1| w_{q,\vartheta}^2 |h(t, -1, \bar{x}, v)|^2 dv d\bar{x} dt \\ |Y_{T,w}^-(h)|^2 &= \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1| w_{q,\vartheta}^2 |h(t, 1, \bar{x}, v)|^2 dv d\bar{x} dt + \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1| w_{q,\vartheta}^2 |h(t, -1, \bar{x}, v)|^2 dv d\bar{x} dt \end{aligned}$$

当 $q = 0$ 时, 我们也记 $Y_T^\pm(\cdot) := Y_{T,w}^\pm(\cdot)$ 。

证明 对方程 (11) 关于变量 x 求 α 阶偏导数 ($\alpha \in \Lambda$), 则有

$$\partial_t \partial^\alpha f + v \cdot \nabla_{x_1, \bar{x}} \partial^\alpha f + L \partial^\alpha f = \partial^\alpha H, t > 0, (x_1, \bar{x}) \in \Omega, v = (v_1, \bar{v}) \in \mathbf{R}^3 \tag{12}$$

相应的初始条件及边界条件为

$$\partial^\alpha f(0, x_1, \bar{x}, v) = \partial^\alpha f_0(x_1, \bar{x}, v), f(t, -1, \bar{x}, v)|_{v_1 > 0} = g_-(t, \bar{x}, v), f(t, 1, \bar{x}, v)|_{v_1 < 0} = g_+(t, \bar{x}, v) \tag{13}$$

现在给定速度矩: $\mu^{\frac{1}{2}}, v_j \mu^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{6}(|v|^2 - 3)\mu^{\frac{1}{2}}, (v_j v_m - 1)\mu^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{10}(|v|^2 - 5)v_j \mu^{\frac{1}{2}}, (j, m = 1, 2, 3)$ 。将速度矩分别与方程 (11) 作内积, 可得宏观量 $[a, b, c](t, x)$ 满足方程组的发展方程

$$\begin{cases} \partial_t a + \partial_{x_1} b_1 + \partial_{\bar{x}} \cdot \bar{b} = 0, \bar{b} = (b_2, b_3) \\ \partial_t b + \nabla_x (a + 2c) + \nabla_x \cdot \Theta(\{I - P\} f) = 0 \\ \partial_t c + \frac{1}{3} \nabla_x \cdot b + \frac{1}{6} \nabla_x \cdot \Lambda(\{I - P\} f) = 0 \\ \partial_t [\Theta_{jm}(\{I - P\} f) + 2c \delta_{jm}] + \partial_j b_m + \partial_m b_j = \Theta_{jm}(\mathbf{r} + \mathbf{h}) \\ \partial_t \Lambda_j(\{I - P\} f) + \partial_j c = \Lambda_j(\mathbf{r} - \mathbf{h}) \end{cases} \tag{14}$$

这里高阶矩函数 $\Theta = (\Theta_{jm}(\cdot))_{3 \times 3}$ 和 $\Lambda = (\Lambda_j(\cdot))_{1 \leq j \leq 3}$ 分别定义为

$$\Theta_{jm}(f) = \left((v_j v_m - 1) \mu^{\frac{1}{2}}, f \right)_{L^2_{x_1} L^2_{\bar{x}}}, \Lambda_j(f) = \frac{1}{10} \left((|v|^2 - 5) v_j \mu^{\frac{1}{2}}, f \right)_{L^2_{x_1} L^2_{\bar{x}}}$$

\mathbf{r} 和 \mathbf{h} 分别为 $\mathbf{r} = -v \partial_x \{I - P\} f, \mathbf{h} = -L \{I - P\} f + H$ 。另外, δ_{jm} 为 Kronecker 符号。

用对偶的技推导宏观量 $[a, b, c](t, x)$ 的 L^2 的估计。令测试函数 $\Phi(t, x, v) \in C^1((0, +\infty) \times \Omega \times \mathbf{R}^3)$ 。将方程 (12) 与 $\Phi(t, x, v)$ 做内积, 并关于时间 t 在区间 $[0, T](T > 0)$ 上积分, 利用式 (9) 可得

$$-\int_0^T (\mathbf{P} \partial^\alpha f, v \cdot \nabla_{x_1, \bar{x}} \Phi) dt = \sum_{i=1}^5 S_i \tag{15}$$

其中, $S_i (1 \leq i \leq 5)$ 分别为

$$\begin{aligned} S_1 &= (\partial^\alpha f, \Phi)(0) - (\partial^\alpha f, \Phi)(T), S_2 = \int_0^T (\partial^\alpha f, \partial_t \Phi) dt, S_3 = \int_0^T (\{I - P\} \partial^\alpha f, v \cdot \nabla_{x_1, \bar{x}} \Phi) dt \\ S_4 &= -\int_0^T (L \partial^\alpha f, \Phi) dt + \int_0^T (\partial^\alpha H, \Phi) dt, S_5 = -\int_0^T \langle v_1 \partial^\alpha f(1), \Phi(1) \rangle dt + \langle v_1 \partial^\alpha f(-1), \Phi(-1) \rangle dt \end{aligned}$$

针对系数函数 $c(t, x)$, 我们选择测试函数

$$\Phi = \Phi_c = (|v|^2 - 5) \left\{ v \cdot \nabla_{x_1, \bar{x}} \phi_c(t, x) \right\} \mu^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

$$-\sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2 \phi_c = \partial^\alpha c, \phi_c(\pm 1) = 0 \tag{17}$$

由椭圆估计, 我们知道

$$\|\phi_c\|_{H^2} \lesssim \|\partial^\alpha c\| \tag{18}$$

现在估计方程 (15) 的左端项, 由式 (10) 及 (17) 可得

$$\begin{aligned} -\int_0^T (P \partial^\alpha f, v \cdot \nabla_{x_1, \bar{x}} \Phi) dt &= -\sum_{j,n=1}^3 \int_0^T \left\{ \partial^\alpha a + (\partial^\alpha b \cdot v) + \frac{1}{2} (|v|^2 - 3) \partial^\alpha c \right\} \mu^{\frac{1}{2}} v_j v_n (|v|^2 - 5) \mu^{\frac{1}{2}} \partial_j \partial_n \phi_c dt \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_0^T (\partial^\alpha c, \partial_j^2 \phi_c) dt = 15 \int_0^T \|\partial^\alpha c\|^2 dt \end{aligned}$$

接下来, 我们依次对方程 (15) 的右端项进行估计, 我们分五步进行讨论:

1) 由 (18) 有 $\|\partial_x^2 \phi_c\| \lesssim \|\partial^\alpha c\|$, 又因为 $\|\partial^\alpha c\| \lesssim \|\partial_x^\alpha f\|$, 由 Cauchy-Schwartz 不等式推出

$$|S_1| \lesssim \|\partial^\alpha f(T)\|^2 + \|\partial^\alpha f_0\|^2$$

2) 从 (15) 中的第三个方程中得到

$$\|\partial_t \partial_x^\alpha c\|_{H_x^{-1}} \lesssim \|\partial^\alpha b\| + \|(I - P) \partial^\alpha f\|_D$$

再利用 (17), 可以推出

$$\|\partial_t \phi_c\|_{H_x^1} \lesssim \|\partial_t \partial_x^\alpha c\|_{H_x^{-1}}$$

其次, 利用 (10) 易知 $(\partial^\alpha P f, \partial_t \Phi_c) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} |S_2| &\leq \int_0^T |\partial^\alpha f, \partial_t \Phi_c| dt = \int_0^T |(\{I - P\} \partial^\alpha f, \partial_t \Phi_c)| dt \lesssim \eta \int_0^T \|\partial_t \Phi_c\|^2 dt + C_\eta \int_0^T \|\{I - P\} \partial^\alpha f\|_D^2 dt \\ &\lesssim \eta \int_0^T \|\partial_t \partial_x \phi_c\|^2 dt + C_\eta \int_0^T \|\{I - P\} \partial^\alpha f\|_D^2 dt \lesssim \eta \int_0^T \|\partial^\alpha b\|^2 dt + C_\eta \int_0^T \|\{I - P\} \partial^\alpha f\|_D^2 dt \end{aligned}$$

3) 由式 (18) 和 Young 不等式, 可推出

$$|S_3| \lesssim \eta \int_0^T \|\partial^\alpha c\|^2 dt + C_\eta \int_0^T \|\{I - P\} \partial^\alpha f\|_D^2 dt$$

4) 利用 $L \partial^\alpha f = L \{I - P\} \partial^\alpha f$ 及椭圆估计 (18) 得到

$$|S_4| \leq \eta \int_0^T \|\partial^\alpha c\|^2 dt + C_\eta \int_0^T \|\{I - P\} \partial^\alpha f\|_D^2 dt + C_\eta \int_0^T \left\| \left(\partial^\alpha H, \mu^{\frac{1}{4}} \right) \right\|_{L_x^2}^2 dt$$

5) 对于边界项 S_5 , 首先我们知道

$$\Phi_c(\pm 1) = (|v|^2 - 5) v \cdot \nabla_x \phi_c(t, \pm 1, \bar{x}) \mu^{\frac{1}{2}}$$

通过迹定理有

$$\|\nabla_x \phi_c(t, \pm 1, \bar{x})\| \lesssim \|\phi_c(t, \bar{x})\|_{H_x^2} \lesssim \|\partial^\alpha c\| \tag{19}$$

进而, 利用 Young 不等式和 (19) 有

$$|S_5| \lesssim \eta \int_0^T \|\partial^\alpha c\|^2 dt + C_\eta \int_0^T \int \int_{\mathbb{R}^3} |v_1| |\partial^\alpha f(1)|^2 dv d\bar{x} dt + C_\eta \int_0^T \int \int_{\mathbb{R}^3} |v_1| |\partial^\alpha f(-1)|^2 dv d\bar{x} dt$$

因为 $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{\bar{x}}^{\alpha_2}$, 当 $\alpha_1 = 1$ 时, 有 $\partial^\alpha f(x) = \partial_{\bar{x}}^{\alpha_2} \partial_{x_1}^1 f(x)$ 。此时, 法向导数不能直接作用到边界上, 我们通过方程 (11) 将法向导数转移到切向上, 即

$$\begin{aligned} \int_0^T \int \int_{\mathbb{R}^3} |v_1| |\partial^\alpha f(1)|^2 dv d\bar{x} dt &\lesssim \int_0^T \int \int_{\mathbb{R}^3} |v_1|^{-1} \left(\left| \partial_t (\partial^\alpha g_+) \right|^2 + \left| \bar{v} \cdot \nabla_{\bar{x}} (\partial^\alpha g_+) \right|^2 + \left| L(\partial^\alpha g_+) \right|^2 + \left| \partial^\alpha H(1) \right|^2 \right) dv d\bar{x} dt \\ &\lesssim E_1^2(\partial^\alpha g_+) + \int_0^T \int \int_{\mathbb{R}^3} |v_1|^{-1} |\partial^\alpha H(1)|^2 dv d\bar{x} dt \end{aligned}$$

同样地, 有

$$\iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(-1)|^2 dv d\bar{x} dt \lesssim E_1^2(\partial^\alpha g_-) + \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1|^{-1} |\partial^\alpha H(-1)|^2 dv d\bar{x} dt$$

当 $\alpha_1 = 0$ 时, 只有切向导数, 切向导数可以直接作用到边界上。因此

$$\begin{aligned} \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(1)|^2 dv d\bar{x} dt &= \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1| |\partial^\alpha g_+|^2 dv d\bar{x} dt \\ \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(-1)|^2 dv d\bar{x} dt &= \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1| |\partial^\alpha g_-|^2 dv d\bar{x} dt \end{aligned}$$

将 $S_i (1 \leq i \leq 5)$ 加在一起, 得到关于系数函数 $c(t, x)$ 的估计为

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\partial^\alpha c\|^2 dt &\lesssim \|\partial^\alpha f(T)\|^2 + \|\partial^\alpha f_0\|^2 + C_\eta |Y_T^+(\partial^\alpha f)|^2 \\ &+ C_\eta \int_0^T \{I - P\} \|\partial^\alpha f\|_D^2 dt + E_1^2(\partial^\alpha g_\pm) + E_2^2(\partial^\alpha g_\pm) + \eta \int_0^T \|\partial^\alpha b\|^2 dt + C_\eta \int_0^T \left\| (\partial^\alpha H, \mu^{\frac{1}{4}})_{L_c^2} \right\|^2 dt \\ &+ \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1|^{-1} |\partial^\alpha H(1)|^2 dv d\bar{x} dt + \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1|^{-1} |\partial^\alpha H(-1)|^2 dv d\bar{x} dt \end{aligned}$$

利用同样地方法可以估计 $a(t, x)$ 、 $b(t, x)$, 为简洁起见我们略去具体的推导。则定理 4 得证。

4 主要定理证明

4.1 定理 1 证明

在这一节当中, 我们利用能量估计及上面两个部分的估计研究初边值问题 (2)、(3) 和 (4) 解的相关性质, 即证明定理 1。

4.1.1 全局存在性 对于解的全局存在性, 这里只证明解的先验估计, 因为解的全局存在可以通过局部解的构造和连续性技巧得到, 而解的局部存在性的证明与文献 [22] 中的证明完全类似, 故省略。

令 $\alpha \in \Lambda$, 首先, 对方程 (2) 关于变量 x 求 α 阶导数, 有

$$\partial_t \partial^\alpha f + v \cdot \nabla_x \partial^\alpha f + L \partial^\alpha f = \partial^\alpha \Gamma(f, f) \tag{20}$$

其次, 将方程 (20) 与 $\partial^\alpha f$ 关于变量 (x, v) 做内积, 并在 $[0, t] (0 < t \leq T)$ 上积分, 得到

$$\int_0^t (\partial_t \partial^\alpha f, \partial^\alpha f) d\tau + \int_0^t (v_1 \partial_{x_1} \partial^\alpha f, \partial^\alpha f) d\tau + \int_0^t (\bar{v} \cdot \nabla_x \partial^\alpha f, \partial^\alpha f) d\tau + \int_0^t (L \partial^\alpha f, \partial^\alpha f) d\tau = \int_0^t (\partial^\alpha \Gamma(f, f), \partial^\alpha f) d\tau \tag{21}$$

方程 (21) 左端第二项的估计为

$$\int_0^t (v_1 \partial_{x_1} \partial^\alpha f, \partial^\alpha f) d\tau = \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(1)|^2 dv d\bar{x} d\tau - \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(-1)|^2 dv d\bar{x} d\tau$$

由边界条件可知, 当 $\alpha_1 = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t (v_1 \partial_{x_1} \partial^\alpha f, \partial^\alpha f) d\tau &= \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(1)|^2 dv d\bar{x} d\tau - \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(-1)|^2 dv d\bar{x} d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1| |\partial^\alpha g_+|^2 dv d\bar{x} d\tau - \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(-1)|^2 dv d\bar{x} d\tau \end{aligned}$$

当 $\alpha_1 = 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t (v_1 \partial_{x_1} \partial^\alpha f, \partial^\alpha f) d\tau &\leq \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(1)|^2 dv d\bar{x} d\tau - \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int |v_1| |\partial^\alpha f(-1)|^2 dv d\bar{x} d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 < 0} \int v_1^{-1} \left(\left| \partial_t \partial^\alpha g_+ \right|^2 + \left| \bar{v} \cdot \partial_x \partial^\alpha g_+ \right|^2 + \left| L \partial^\alpha g_+ \right|^2 + \left| \partial^\alpha \Gamma(g_+, g_+) \right|^2 \right) dv d\bar{x} d\tau \\ &- \frac{1}{2} \iint_{0 \leq T^2 v_1 > 0} \int v_1^{-1} \left(\left| \partial_t \partial^\alpha g_- \right|^2 + \left| \bar{v} \cdot \partial_x \partial^\alpha g_- \right|^2 + \left| L \partial^\alpha g_- \right|^2 + \left| \partial^\alpha \Gamma(g_-, g_-) \right|^2 \right) dv d\bar{x} d\tau \end{aligned}$$

综上, 得到

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\partial^\alpha f(t)\|^2 + 2\delta_0 \int_0^T \|\{I - P\} \partial^\alpha f\|_D^2 dt + |Y_T^+(\partial^\alpha f)|^2 \leq \|\partial^\alpha f(0)\|^2 + 2 \int_0^T |(\partial^\alpha \Gamma(f, f), \partial^\alpha f)| dt + E^2(\partial^\alpha g_\pm)$$

因此有

$$\sum_{\alpha \in A} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\partial^\alpha f(t)\|_{L_x^2 L_x^2} + \sum_{\alpha \in A} \left(\int_0^T \|\{I - P\} \partial^\alpha f\|_D^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{\alpha \in A} |Y_T^+(\partial^\alpha f)| \lesssim \sum_{\alpha \in A} \|\partial^\alpha f_0\|_{L_x^2 L_x^2} + \sum_{\alpha \in A} E(\partial^\alpha g_\pm) \quad (11)$$

将 (11) 与定理 4 中的估计进行线性组合, 并利用定理 3, 则有

$$E_T(f) + D_T(f) \lesssim \sum_{\alpha \in A} \|\partial^\alpha f_0\|_{L_x^2 L_x^2} + E_T(f) D_T(f) + \sum_{\alpha \in A} E(\partial^\alpha g_\pm)$$

将方程 (20) 与 $w_{q,\vartheta}^2 \partial^\alpha f$ 作内积, 利用 2.2 小节中的第二个强制性估计, 可以得到

$$E_{T,w}(f) + D_{T,w}(f) \lesssim \sum_{\alpha \in A} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f_0\|_{L_x^2 L_x^2} + E_{T,w}(f) D_{T,w}(f) + \sum_{\alpha \in A} E(w_{q,\vartheta} \partial^\alpha g_\pm)$$

4.1.2 时间衰减估计 这里我们只证明软位势 $-3 < \gamma < -2s$ 的情况, 令 $h = e^{\lambda t} f$, 其中 $\lambda > 0, 0 < p < 1$, 代入方程 (20), 得

$$\partial_t \partial^\alpha h + v_1 \partial_{x_1} \partial^\alpha h + \bar{v} \cdot \nabla_x \partial^\alpha h + L \partial^\alpha h = e^{-\lambda t} \partial^\alpha \Gamma(h, h) + \lambda p t^{p-1} \partial^\alpha h \quad (22)$$

给定初始条件及边界条件

$$\begin{aligned} \partial^\alpha h(0, x_1, \bar{x}, v) &= \partial^\alpha f_0(x_1, \bar{x}, v) \\ h(t, -1, \bar{x}, v)|_{v_1 > 0} &= e^{\lambda t} g_-(t, \bar{x}, v), h(t, 1, \bar{x}, v)|_{v_1 > 0} = e^{\lambda t} g_+(t, \bar{x}, v) \end{aligned}$$

将方程 (22) 与 $\partial^\alpha h$ 关于变量 x, v 作内积且关于时间 t 积分, 做类似于 4.1.1 的估计, 得

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{\alpha \in A} \|\partial^\alpha h(t)\|_{L_x^2 L_x^2} + \sum_{\alpha \in A} \left(\int_0^T \|\partial^\alpha h\|_D^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \sum_{\alpha \in A} \|\partial^\alpha f_0\|_{L_x^2 L_x^2} + \sum_{\alpha \in A} \sup_{0 \leq t \leq T} E(e^{\lambda t} \partial^\alpha g_\pm) + \sum_{\alpha \in A} \sqrt{\lambda p} \left(\int_0^T t^{p-1} \|\partial^\alpha h\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

处理不等式 (23) 右端的第三项, 令集合 $E = \{\langle v \rangle \leq \rho t^{p'}\}$, 其中 $\rho > 0, p' > 0$, 分解 $I = I_E + I_{E^c}$, 则

$$\sqrt{\lambda p} \left(\int_0^T t^{p-1} \|\partial^\alpha h\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\lambda p} \left(\int_0^T t^{p-1} 1_E \|\partial^\alpha h\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\lambda p} \left(\int_0^T t^{p-1} 1_{E^c} \|\partial^\alpha h\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} := I_1 + I_2,$$

令 $p = (\gamma + 2s)p' + 1$,

$$I_1 \leq \sqrt{\lambda p} \rho^{-\frac{p+1}{p'}} \left(\int_0^T \langle v \rangle^{\frac{p-1}{p'}} \|\partial^\alpha h\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\lambda p} \rho^{-\frac{p+1}{p'}} \left(\int_0^T \|\partial^\alpha h\|_D^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

因为 $E^c = \{\langle v \rangle \geq \rho t^{p'}\}$, 所以有 $w_{q,\vartheta}^{-2} \leq e^{-\frac{q\rho^{\vartheta} t^{p'\vartheta}}{2}}$, 令 $p = p'\vartheta$ 和 $2\lambda < \frac{q\rho^{\vartheta}}{2}$, 则可得

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sqrt{\lambda p} \left(\int_0^T \int_{I \times \mathbb{R}^2 E^c} \int t^{p-1} e^{2\lambda t} e^{-\frac{q}{2}\rho^{\vartheta} t^{p'\vartheta}} w_{q,\vartheta}^2 |\partial^\alpha f|^2 dv dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\lambda p} \sup_{0 \leq t \leq T} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f(t)\|_{L_x^2 L_x^2} \left(\int_0^T t^{p-1} e^{2\lambda t} e^{-\frac{q}{2}\rho^{\vartheta} t^{p'\vartheta}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \sqrt{\lambda p} \sup_{0 \leq t \leq T} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f\|_{L_x^2 L_x^2} \end{aligned}$$

综上所述, 推出

$$\sum_{\alpha \in A} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\partial^\alpha h\|_{L_x^2 L_x^2} + \sum_{\alpha \in A} \left(\int_0^T \|\partial^\alpha h\|_D^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \sum_{\alpha \in A} \|w_{q,\vartheta} \partial^\alpha f_0\|_{L_x^2 L_x^2} + \sum_{\alpha \in A} \sup_{0 \leq t \leq T} E(e^{\lambda t} \partial^\alpha g_\pm) + \sum_{\alpha \in A} E(\partial^\alpha g_\pm)$$

这样, 我们就完成了定理 1 后一部分的证明。

4.1.3 唯一性和非负性 下面我们证明上述构建的整体解具有唯一性, 用反证法证之。假设对于方程 (2) 存在另外一个解 $g(t, x, v)$, 令 $\bar{h}(t, x, v) = (f - g)(t, x, v)$, 则有

$$\begin{aligned} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) \bar{h} + L \bar{h} &= \Gamma(\bar{h}, \bar{h}), t > 0, x \in \Omega, v \in \mathbb{R}^3 \\ \bar{h}(0, x, v) &= 0, \bar{h}(t, -1, \bar{x}, v)|_{v_1 > 0} = 0, \bar{h}(t, 1, \bar{x}, v)|_{v_1 < 0} = 0 \end{aligned}$$

方程两端与 \bar{h} 作内积, 并关于时间 t 积分, 得

$$\int_0^T ((\partial_t + v \cdot \nabla_x) \bar{h}, \bar{h}) dt + \int_0^T (L \bar{h}, \bar{h}) dt = \int_0^T (\Gamma(\bar{h}, \bar{h}), \bar{h}) dt$$

对方程两端利用第二部分的估计, 得

$$\|\bar{h}(t)\|^2 + \delta \int_0^t \|\bar{h}(\tau)\|_D^2 d\tau \lesssim C_0 \left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\bar{h}(\tau)\|^2 + \epsilon_0 \int_0^t \|\bar{h}(\tau)\|_D^2 d\tau \right)$$

由 Gronwall 不等式容易得到 $f = g$, 即方程有唯一解。

关于解的非负性, 当 $F_0(x, v) = \mu + \mu^{\frac{1}{2}} f(0, x, v) \geq 0$ 时, 则一定有 $F(t, x, v) = \mu + \mu^{\frac{1}{2}} f(t, x, v) \geq 0$, 证明过程参考文献 [28] (见 96 页)。则定理 1 中的部分内容得证。

4.2 定理 2 的证明

这一节将说明在定理 2 的假设下, 初边值问题解的正则性可以沿着切向方向传播到管道内部, 即在 \bar{x} 方向上解的正则性的传播。假设 $\alpha \in \Pi$, $\Pi = \{\alpha = (\alpha_1, \bar{\alpha}) \mid \alpha_1 \leq 1, |\bar{\alpha}| \leq m\}$, 方程 (20) 关于变量 x, v 与 $w_{q, \vartheta}^2 \partial^\alpha f$ 作内积, 且对时间 t 积分, 有

$$\int_0^t (\partial_t \partial^\alpha f, w_{q, \vartheta}^2 \partial^\alpha f) d\tau + \int_0^t (v \cdot \nabla_x \partial^\alpha f, w_{q, \vartheta}^2 \partial^\alpha f) d\tau + \int_0^t (L \partial^\alpha f, w_{q, \vartheta}^2 \partial^\alpha f) d\tau = \int_0^t (\partial^\alpha \Gamma(f, f), w_{q, \vartheta}^2 \partial^\alpha f) d\tau$$

对该式的每一项进行估计, 我们有

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f(t)\|^2 + 2\delta_0 \int_0^T \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f\|_D^2 dt - C \int_0^T \|\partial^\alpha f\|_D^2 dt + |Y_{T, w}^+(\partial^\alpha f)|^2 - |Y_{T, w}^-(\partial^\alpha f)|^2 \\ & \leq \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f_0\|^2 + 2 \int_0^T |(\partial^\alpha \Gamma(f, f), w_{q, \vartheta}^2 \partial^\alpha f)| dt \end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f(t)\|^2 + 2\delta_0 \int_0^T \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f\|_D^2 dt + |Y_{T, w}^+(\partial^\alpha f)|^2 \\ & \leq \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f_0\|^2 + 2 \int_0^T |(\partial^\alpha \Gamma(f, f), w_{q, \vartheta}^2 \partial^\alpha f)| dt + \sum_{\alpha \in \Pi} E^2(w_{q, \vartheta} \partial^\alpha g_\pm) \end{aligned}$$

通过定理 3 知这里右端的非线性项可以被控制, 再利用定理 4 得到

$$\sum_{\alpha \in \Pi} \sup_{0 \leq t \leq T} \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f(t)\|_{L_t^2 L_x^2} + \sum_{\alpha \in \Pi} \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f\|_{L_t^2 L_x^2} \lesssim \sum_{\alpha \in \Pi} \|w_{q, \vartheta} \partial^\alpha f_0\|_{L_t^2 L_x^2} + \sum_{\alpha \in \Pi} E(w_{q, \vartheta} \partial^\alpha g_\pm)$$

定理得证。

参考文献:

- [1] CERCIGNANI C. Existence and uniqueness in the large for Boundary value problems in kinetic theory [J]. Journal of Mathematical Physics, 1967, 8(8): 1653–1656.
- [2] CERCIGNANI C. Existence, uniqueness, and convergence of the solutions of models in kinetic theory [J]. Journal of Mathematical Physics, 1968, 9(4): 633–639.
- [3] PAO Y P. Boundary-value problems for the linearized and weakly nonlinear Boltzmann equation [J]. Journal of Mathematical Physics, 1967, 8(9): 1893–1898.
- [4] ESPOSITO R, LEBOWITZ J L, MARRA R. Hydrodynamic limit of the stationary Boltzmann equation in a slab [J]. Communications in Mathematical Physics, 1994, 160(1): 49–80.
- [5] ESPOSITO R, LEBOWITZ J L, MARRA R. The Navier–Stokes limit of stationary solutions of the nonlinear Boltzmann equation [J]. Journal of Statistical Physics, 1995, 78(1/2): 389–412.
- [6] SHIZUTA Y, ASANO K. Global solutions of the Boltzmann equation in a bounded convex Domain [J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 1977, 53(1): 3–5.
- [7] VIDAV I. Spectra of perturbed semigroups with applications to transport theory [J]. Journal of Mathematical Analysis and Ap-

- plications, 1970, 30(2): 264–279.
- [8] UKAI S. Solutions of the Boltzmann equation [J]. *Studies in Mathematics and its Applications*, 1986, 18: 37–96.
- [9] HAMDACHE K. Initial-boundary value problems for the Boltzmann equation: global existence of weak solutions [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1992, 119(4): 309–353.
- [10] CERCIGNANI C. On the initial-boundary value problem for the Boltzmann equation [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1992, 116(4): 307–315.
- [11] GUO Y. Decay and continuity of the Boltzmann equation in bounded Domains [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2010, 197(3): 713–809.
- [12] ESPOSITO R, GUO Y, KIM C, et al. Non-isothermal boundary in the Boltzmann theory and Fourier law [J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2013, 323(1): 177–239.
- [13] BRIANT M, GUO Y. Asymptotic stability of the Boltzmann equation with Maxwell boundary conditions [J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, 261(12): 7000–7079.
- [14] KIM C, LEE D. The Boltzmann equation with specular boundary condition in convex domains [J]. *Comm. Pure Appl Math*, 2018, 71: 411–504.
- [15] GUO Y. Decay and continuity of the Boltzmann equation in bounded domains [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2010, 197(3): 713–809.
- [16] LIU S Q, YANG X. The initial boundary value problem for the Boltzmann equation with soft potential [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2017, 223(1): 463–541.
- [17] DUAN R J, WANG Y. The Boltzmann equation with large-amplitude initial data in bounded domains [J]. *Advances in Mathematics*, 2019, 343: 36–109.
- [18] GUO Y, LIU S Q. The Boltzmann equation with weakly inhomogeneous data in bounded domain [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2017, 272(5): 2038–2057.
- [19] ESPOSITO R, GUO Y, KIM C, et al. Stationary solutions to the Boltzmann equation in the Hydrodynamic limit [J]. *Annals of PDE*, 2018, 4(1): 1–119.
- [20] DUAN R J, LIU S Q. Compressible Navier–Stokes approximation for the Boltzmann equation in bounded domains [EB/OL]. (2018-06-26)[2020-08-20]. <https://arxiv.org/abs/1806.09796>.
- [21] GUO Y, HWANG H J, JANG J W, et al. The Landau equation with specular reflection boundary condition [EB/OL]. (2019-05-01) <https://arxiv.org/abs/1905.00173>.
- [22] DUAN R J, LIU S Q, SAKAMOTO S, et al. Global mild solutions of the Landau and non-cutoff Boltzmann equations [EB/OL]. (2019-04-27) <https://arxiv.org/abs/1904.12086>.
- [23] GUO Y, KIM C, TONON D, et al. Regularity of the Boltzmann equation in convex domains [J]. *Inventiones Mathematicae*, 2017, 207(1): 115–290.
- [24] ALEXANDRE R, MORIMOTO Y, UKAI S, et al. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: I, global existence for soft potential [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2012, 262(3): 915–1010.
- [25] GRESSMAN P T, STRAIN R M. Global classical solutions of the Boltzmann equation without angular cut-off [J]. *Journal of the American Mathematical Society*, 2011, 24(3): 771–847.
- [26] DUAN R J, LIU S Q, YANG T, et al. Stability of the nonrelativistic Vlasov–Maxwell–Boltzmann system for angular non-cut-off potentials [J]. *Kinetic Theory and Related Models*, 2013, 6(1): 159–204.
- [27] FAN Y, LEI Y, LIU S Q. The non-cutoff Vlasov–Maxwell–Boltzmann system with weak angular singularity [J]. *Science China Mathematics*, 2018, 61(1): 111–136.
- [28] ALEXANDRE R, MORIMOTO Y, UKAI S, et al. Regularizing effect and local existence for the non-cutoff Boltzmann equation [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2010, 198(1): 39–123.

(责任编辑 王海蓉)